ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1983

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

▲

Dans tout le problème, on note $\langle x \rangle$ la *partie fractionnaire* du nombre réel x, c'est-à-dire le nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$ tel que $x - \langle x \rangle$ appartienne à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Les parties II et III peuvent être traitées en ne connaissant de la partie I que le résultat indiqué par l'énoncé dans I.5.

I

1 - Pour tout x réel et tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q(x) = \sum_{p=1}^{q} \frac{\sin 2p\pi x}{p\pi}$. Montrer que $S_q(x) = \int_0^x \frac{\sin (2q+1)\pi u}{\sin \pi u}\, du - x$.

2 - On définit sur $]-1, 1[$ la fonction φ par $\varphi(0) = 0$ et, pour tout u tel que $0 < |u| < 1$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sin \pi u} - \frac{1}{\pi u}$.

a. Montrer que φ est continûment dérivable sur $]-1, 1[$.

b. Établir l'existence d'une constante réelle A_1 telle que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et tout entier $q \geqslant 1$,

$$\left| S_q(x) + x - \frac{1}{\pi} \int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\, dv \right| \leqslant \frac{A_1}{q}.$$

c. Calculer $S_q\left(\frac{1}{2}\right)$ et déduire de l'inégalité précédente la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv$.

3 - Établir l'existence d'une constante réelle A_2 telle que, pour tout x réel et tout entier $q \geqslant 1$, $|S_q(x)| \leqslant A_2$.

4 -***a***. Trouver en fonction de x la limite de la suite $(S_q(x))_{q \in \mathbb{N}^*}$ où $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

b. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$ disjointe de $\mathbb{Z}$. Établir l'existence d'un nombre α strictement positif tel que pour tout $x \in K$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, on ait $|x - r| \geqslant \alpha$. La convergence de la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur K ? Est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

5 - On rappelle que les intégrales de fonctions à valeurs complexes d'une variable réelle ont les mêmes propriétés opératoires que les intégrales de fonctions à valeurs réelles. Montrer que pour tout intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue de [a, b] dans $\mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b f(x) \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \int_a^b f(x) \sin 2p\pi x\, dx.$$

.../...

II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple $(x, z) \in]0, +\infty[\times \mathbb{C}$, on note x^z le nombre réel ou complexe $e^{z \operatorname{Log} x}$, et la partie réelle et la partie imaginaire de z seront respectivement désignées par s et t. De plus, dans cette partie II, n est un entier strictement positif.

1 -*a*. Pour z complexe fixé, quelles sont les primitives de la fonction $x \mapsto x^{-z}$?

***b*.** Établir par récurrence sur n l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-z} = 1 + \int_1^n x^{-z}\,dx - z\int_1^n \langle x \rangle\, x^{-z-1}\,dx .$$

***c*.** En déduire pour s strictement positif et différent de 1 une valeur approchée à 0,5 près de $\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$ sous forme d'une fonction affine d'une puissance de n (on explicitera l'exposant de cette puissance et les coefficients de la fonction affine). Comment ce résultat se modifie-t-il si $s = 1$?

2 - *a*. Vérifier que si la partie réelle s de z est strictement positive, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \langle x \rangle\, x^{-z-1}\,dx$ converge.

***b*.** Soit Ω le complémentaire du point 1 dans le demi-plan complexe $s > 0$; on définit dans Ω la fonction ζ par

$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z\int_1^{+\infty} \langle x \rangle\, x^{-z-1}\,dx .$$

Comparer, pour $s > 1$, $\zeta(z)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-z}$

***c*.** Établir, pour tout $z \in \Omega$ et tout réel $y \geqslant n$, l'égalité

$$\zeta(z) - \sum_{k=1}^{n} k^{-z} = \frac{n^{1-z}}{z-1} - \frac{1}{2}n^{-z} + z\int_y^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) x^{-z-1}\,dx + \frac{z}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}\int_n^y x^{-z-1}\sin 2p\pi x\,dx .$$

3 - On donne un entier $p > 0$ et un réel $t \in [-n, n]$ et on note g la fonction définie sur $[n, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{-x^{-3/2}}{2p\pi - \dfrac{t}{x}} .$$

Déterminer numériquement un nombre réel B_1 tel que pour tout $x \in [n, +\infty[$ on ait $g'(x) \leqslant \dfrac{B_1}{p} x^{-5/2}$, puis un nombre réel B_2 tel que pour tout $y \in [n, +\infty[$ on ait

$$\left|\int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it} e^{2ip\pi x}\,dx\right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2}p} \quad \text{et} \quad \left|\int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it}\sin 2p\pi x\,dx\right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2}p}$$

(on ne demande pas d'obtenir les réels B_1 et B_2 les plus petits possible).

.../...

4 - Établir l'existence d'un nombre réel B_3 tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in [-n, n]$ on ait

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) - \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it} \right| \leqslant B_3 \frac{\sqrt{n}}{1 + |t|} .$$

III

Dans cette partie, n est un entier au moins égal à 2.

1 - ***a***. Quel est, pour x réel strictement positif, le signe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x - 1 + \frac{1}{x}$?

b. Établir l'inégalité $$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ k/2 < j < k}} \frac{1}{\sqrt{kj}\,\operatorname{Log}\frac{k}{j}} \leqslant \sqrt{2} \sum_{\substack{h,k \\ 1 \leqslant h \leqslant k \leqslant n}} \frac{1}{h}$$

où la première somme est prise égale à 0 si son ensemble d'indexation est vide, c'est-à-dire si $n = 2$.

c. Montrer l'existence d'un nombre réel C_1 tel que $C_1 n \operatorname{Log} n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

2 - ***a***. Établir l'inégalité

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj}\,\operatorname{Log}\frac{k}{j}} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 .$$

b. Montrer l'existence d'un nombre réel C_2 tel que $C_2 n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

3 - ***a***. Établir l'égalité

$$\int_0^n \left| \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it} \right|^2 dt = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + i \sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in} - 1}{\sqrt{kj}\,\operatorname{Log}\frac{k}{j}} .$$

b. Montrer l'existence d'un nombre réel C_3 tel que $C_3 n \operatorname{Log} n$ majore pour tout n les deux membres de l'égalité précédente.

4 - Démontrer qu'il existe un réel C tel que pour tout réel positif T on ait

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \leqslant CT \operatorname{Log}(T + 2) .$$

♦ ♦ ♦